

Colles
corrigées et commentées

ECG-1

Maths appliquées

*S'entraîner
aux concours
dès la Sup*



Olivier Arrigoni

Fonctions polynomiales

1.1 Trinômes du second degré

- On appelle fonction trinôme du second degré toute fonction donnée par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.

- On appelle **discriminant** du trinôme ci-dessus le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Le trinôme du second degré admet les racines suivantes (solutions de $f(x) = 0$) :
 - Si $\Delta < 0$, f n'admet pas de racines ;
 - Si $\Delta = 0$, f admet une seule racine (qualifiée de double) qu'est $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
 - Si $\Delta > 0$, f admet deux racines distinctes que sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Une fonction trinôme du second degré admet pour factorisation :
 - Lorsque $\Delta < 0$, $f(x)$ n'est pas factorisable ;
 - Lorsque $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$;
 - Lorsque $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Une fonction trinôme du second degré admet pour signe :
 - Lorsque $\Delta < 0$, elle est de signe constant, celui de a et ne s'annule jamais ;
 - Lorsque $\Delta = 0$, elle est de signe constant, celui de a et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$;
 - Lorsque $\Delta > 0$, elle est du signe de a sauf pour $x \in [x_1, x_2]$ et s'annule en x_1 et x_2 (ses racines).
- Si x_1 et x_2 sont les racines (éventuellement double, donc répétée deux fois) du trinôme f , on a les **relations coefficients racines** suivantes

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

- La fonction f est monotone sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et $I_2 = [-\frac{b}{2a}; +\infty[$.
 - Lorsque $a > 0$, elle est décroissante sur I_1 et croissante sur I_2 .
 - Lorsque $a < 0$, elle est croissante sur I_1 et décroissante sur I_2 .

Colle 1

Résoudre l'équation $(E) : x^4 - 43x^2 + 432 = 0$.

Solution : Posons $X = x^2$, de sorte que l'équation donnée soit équivalente à $(E') : X^2 - 43X + 432 = 0$.

Conseil

Lorsque les puissances d'une équation polynomiale sont toutes multiples d'un entier k , on pose $X = x^k$ comme inconnue auxiliaire.

On calcule le discriminant $\Delta = 43^2 - 4 \times 432 = 121$ de (E') . Cette équation du second degré comporte deux solutions que sont $X_1 = \frac{43 - \sqrt{121}}{2} = \frac{43 - 11}{2} = 16$ et $X_2 = \frac{43 + 11}{2} = 27$. Pour revenir à l'équation de départ (E) , on sait désormais que celle-ci est équivalente à $x^2 = 16$ ou $x^2 = 27$.

Rappel

Lorsque a est positif, $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

On a finalement $(E) \iff x = 4$ ou $x = -4$ ou $x = 3\sqrt{3}$ ou $x = -3\sqrt{3}$. On conclut sur $S = \{-3\sqrt{3}; -4; 4; 3\sqrt{3}\}$.

Colle 2

Soit m un réel différent de 2 et soit $p(x) = (m-2)x^2 + (2m+1)x + m+2$. Déterminer selon m les racines de p .

Solution : On commence par calculer le discriminant du trinôme p , dépendant de m :

$$\Delta(m) = (2m+1)^2 - 4(m+2)(m-2) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 + 16 = 4m + 17.$$

On détermine alors, selon le signe de $\Delta(m)$, l'existence et la valeur des racines.

Méthode

Lorsqu'un paramètre apparaît dans un exercice (ici m), on ne distingue pas d'emblée les cas. On mène la méthode générale tant que c'est possible de le faire.

- (a) Lorsque $\Delta(m) < 0$, soit $m < -\frac{17}{4}$, le trinôme p n'admet pas de racines.
 (b) Lorsque $\Delta(m) = 0$, soit $m = -\frac{17}{4}$, le trinôme p admet une seule racine (double) qui est

$$x_0 = -\frac{2m+1}{2(m-2)} = -\frac{2m+1}{2m-4}.$$

- (c) Lorsque $\Delta(m) > 0$, soit lorsque $m > -\frac{17}{4}$, le trinôme p admet deux racines réelles que sont

$$x_1 = \frac{-(2m+1) - \sqrt{4m+17}}{2(m-2)} \quad ; \quad x_2 = \frac{-(2m+1) + \sqrt{4m+17}}{2(m-2)}.$$

Colle 3

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré (avec $a \neq 0$).

- Montrer que si a et c sont de signes contraires, alors f admet deux racines distinctes de signes contraires.
- On fixe $a = 1$ dans cette question et on suppose que f admet comme racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues si elles sont doubles). Montrer que :
 - x_1 et x_2 sont positifs si et seulement si b est négatif et c est positif.
 - x_1 et x_2 sont négatifs si et seulement si b et c sont positifs.
 - x_1 et x_2 sont de signes contraires si et seulement si c est négatif.

Solution :

- Si a et c sont de signes contraires, alors $ac < 0$, donc $\Delta = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$ et f admet bien deux racines distinctes x_1 et x_2 . Dans un tel cas, étudions les signes de x_1 et x_2 par leur produit.

Méthode

On utilise les relations coefficients racines lorsqu'on nous demande des informations sur les coefficients a, b, c en fonction des racines x_1 et x_2 .

Selon les relations coefficients racines, on a $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ et $\frac{c}{a}$ est négatif par hypothèse. Donc x_1 et x_2 sont de signes contraires.

2. On poursuit avec les relations coefficients racines.

- (a) Si x_1 et x_2 sont positifs, alors $c = \frac{c}{a} = x_1x_2$ est positif et $b = -(x_1 + x_2)$ est négatif. Réciproquement, avec ces mêmes relations, si c est positif alors x_1 et x_2 sont de même signe et puisque b est négatif, x_1 et x_2 ne peuvent être que positifs tous les deux.
- (b) De la même manière, si x_1 et x_2 sont négatifs, alors $c = x_1x_2$ est positif et $b = -(x_1 + x_2)$ est positif. Réciproquement, si c est positif alors x_1 et x_2 sont de même signe et puisque b est positif, x_1 et x_2 sont nécessairement négatifs.
- (c) Si x_1 et x_2 sont de signes contraires, alors $c = x_1x_2$ est négatif. La réciproque est identique.

Colle 4

Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x + y = 4 \end{cases}$.

Solution :

Méthode

Il est possible de substituer avec la dernière équation, mais on peut montrer une méthode plus générale mettant en jeu les relations coefficients racines.

On va exprimer le produit xy à l'aide des données.

Méthode

Dans un système (non linéaire) à deux inconnues aux expressions polynomiales, on peut exprimer la somme et le produit pour interpréter en terme de trinôme.

On a $xy = \frac{1}{2} ((x + y)^2 - (x^2 + y^2)) = -21$. Ainsi, on obtient l'équivalence

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x + y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = -21 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

Le dernier système est lui-même équivalent au fait que x et y sont les racines du trinôme $p(t) = t^2 - 4t - 21$. Les racines de ce trinôme sont 7 et -3 , on en déduit donc les solutions du système

$$\mathcal{S} = \{(7, -3); (-3, 7)\}$$

1.2 Fonctions polynomiales de degrés quelconques

- Pour tout entier n , la fonction définie par $p(x) = x^n$ est dérivable avec $p'(x) = nx^{n-1}$.
- La fonction p est de signe positif sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair, du signe de x lorsque n est impair.
- Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de p sont $+\infty$ si n est pair, $-\infty$ et $+\infty$ (respectivement) pour n impair.
- On appelle **fonction polynomiale** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où n est un entier naturel, $a_0, \dots, a_n$ les **coefficients** réels du polynôme avec $a_n \neq 0$.

- Dans ce cas n s'appelle le **degré** de la fonction polynomiale f noté $\deg(f)$. Par convention, la fonction nulle (polynôme nul) est polynomiale avec $\deg(0) = -\infty$.
- L'ensemble de toutes les fonctions polynomiales est noté $\mathbb{R}[x]$, celui des fonctions polynomiales de degré au plus n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.
- Un terme de la forme $a_k x^k$ est appelé **monôme** de degré k et a_k s'appelle le **coefficient** de degré k .
- Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients, degré par degré. On parle d'**unicité** des coefficients d'une fonction polynomiale.
- Pour toutes fonctions polynomiales f et g , on a

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g)) \quad ; \quad \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g).$$

- Toute fonction polynomiale f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

- La limite d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est égale à celle de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

- On appelle **racine** de f tout réel a vérifiant $f(a) = 0$.
- a est racine de f si et seulement si $f(x)$ est **factorisable** par $(x - a)$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction polynomiale h telle que $\deg(h) = \deg(f) - 1$ vérifiant

$$f(x) = (x - a)h(x).$$

- Un polynôme de degré au plus n admettant au moins $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Colle 5

Étudier les variations et les limites aux bornes de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 1$.

Solution : La fonction f est dérivable car polynomiale, avec

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \times 2x - 5 = 3x^2 - 8x - 5.$$

f' est un trinôme du second degré, dont on peut donner le signe. Son discriminant est $\Delta = 124$ et ses racines sont $x_1 = \frac{8-\sqrt{124}}{6} = \frac{4-\sqrt{31}}{3}$ et $x_2 = \frac{4+\sqrt{31}}{3}$. f' est positive (du signe de $3 > 0$) sauf entre ses racines.

Rappel

Le signe de la fonction dérivée donne les variations de la fonction.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$					$+\infty$

Méthode

Pour une fonction polynomiale, on applique la règle du monôme de plus haut degré pour ses limites en $\pm\infty$.

Les limites sont $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Colle 6

Résoudre l'équation (E) : $-6x^3 + 3x + 3 = 0$.

Solution : On commence par chercher une racine évidente, en commençant par tester les petits entiers. Il est manifeste que $x = 1$ est racine ($-6 \times 1^3 + 3 \times 1 + 3 = 0$), on peut donc factoriser le membre de gauche par $(x - 1)$.

Méthode

La recherche d'une racine évidente a permet de factoriser par $x - a$ et donc de trouver un facteur de degré diminué.

Il existe des coefficients a, b, c tels que $-6x^3 + 3x + 3 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$. En développant le membre de droite, on obtient

$$-6x^3 + 3x + 3 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

Rappel

L'utilisation de l'unicité des coefficients d'une fonction polynomiale s'appelle **l'identification des coefficients**.

Par identification des coefficients, on obtient les relations $a = -6, b - a = 0, c - b = 3, -c = 3$, ce qui donne $a = -6, b = -6, c = -3$. A ce stade, on a

$$(E) \Leftrightarrow (x - 1)(-6x^2 - 6x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -6x^2 - 6x - 3 = 0.$$

Méthode

On fait ici usage de la règle du produit nul : $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$.

La dernière équation est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = -36 < 0$, elle n'admet donc pas de solutions. Ainsi, 1 est la seule solution de (E) :

$$\mathcal{S} = \{1\}.$$

Colle 7

Soit P une fonction polynomiale de degré 4, dont le coefficient de plus haut degré est 1, admettant 2 et -2 pour racines ainsi que deux autres racines a et b telles que $ab = 7$ et $a + b = \sqrt{2}$. Déterminer $P(x)$.

Solution : Étant donné ses racines et son coefficient dominant, l'expression factorisée de $P(x)$ est

$$P(x) = 1(x - 2)(x + 2)(x - a)(x - b).$$

Rappel

Lorsqu'une fonction polynomiale admet autant de racines $x_1, \dots, x_n$ que son degré n , elle admet pour factorisation

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

où a est le coefficient de plus haut degré (dominant).

Il faut alors développer cette expression, en tenant compte que

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - \sqrt{2}x + 7.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2)(x^2 - \sqrt{2}x + 7) \\ &= x^4 - \sqrt{2}x^3 + 5x^2 + 2\sqrt{2}x - 14. \end{aligned}$$

Colle 8

Factoriser l'expression $A(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 3x - 6$, puis résoudre $A(x) \geq 0$.

Solution : On cherche encore des solutions évidentes : -1 et 2 en sont. $A(x)$ est donc factorisable par $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$. On pratique la factorisation par la division euclidienne.

Rappel

Le quotient de la division euclidienne est le facteur résultant de la factorisation. On trouve le même résultat par la méthode d'identification.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{rrrrr} x^4 & -x^3 & -x^2 & -3x & -6 \\ - (x^4 & -x^3 & -2x^2) & & \\ \hline & & 3x^2 & -3x & -6 \\ - & & (3x^2 & -3x & -6) \\ \hline & & & 0 & \end{array} & \begin{array}{l} x^2 - x - 2 \\ \hline x^2 + 3 \end{array} \end{array}$$

On obtient donc $A(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$, le terme $x^2 + 3$ n'étant pas factorisable. Pour ce qui est de la résolution de $A(x) \geq 0$, cette inéquation équivaut à $x^2 - x - 2 \geq 0$, dans la mesure où le facteur $x^2 + 3$ est strictement positif (il ne change pas le signe).